

Seminar Beweistheorie: Realisierbarkeit

Christian Neukirchen

Mittwoch, 12. Mai 2010

Induktive Definition von Prädikaten und Formeln

$$\begin{aligned} Y|\vec{r} \in \mathbf{F}(\vec{Y}), \quad & \frac{A \in \mathbf{F} \quad B \in \mathbf{F}(\vec{Y})}{A \rightarrow B \in \mathbf{F}(\vec{Y})}, \quad \frac{A \in \mathbf{F}(\vec{Y})}{\forall_x A \in \mathbf{F}(\vec{Y})} \\ & \frac{C \in \mathbf{F}(\vec{Y})}{\{\vec{x} \mid C\} \in \text{Preds}(\vec{Y})}, \quad \frac{P \in \text{Preds}(\vec{Y})}{P\vec{r} \in \mathbf{F}(\vec{Y})}, \\ & \frac{K_0, \dots, K_{k-1} \in \text{Cl}_X(\vec{Y})}{\mu_X(K_0, \dots, K_{k-1}) \in \text{Preds}(\vec{Y})} \quad (k \geq 1), \\ & \frac{\vec{A} \in \mathbf{F}(\vec{Y}) \quad \vec{B}_0, \dots, \vec{B}_{n-1} \in \mathbf{F}}{\forall_{\vec{x}}(\vec{A} \rightarrow (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \rightarrow X\vec{s}_\nu))_{\nu < n} \rightarrow X\vec{t})) \in \text{Cl}_X(\vec{Y})} \quad (n \geq 0). \end{aligned}$$

Diese Definition gilt weiterhin für dekorierte Formeln, wenn man statt \rightarrow entweder \rightarrow^c oder \rightarrow^{nc} und statt \forall entweder \forall^c oder \forall^{nc} einsetzt.

Theorie berechenbarer Funktionale (TCF)

Axiome für jedes induktiv definierte Prädikat $I := \mu_X(K_0, \dots, K_{k-1})$:

$$\text{(INTRO)} \quad \forall_{\vec{x}}(\vec{A} \rightarrow (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \rightarrow I\vec{s}_\nu))_{\nu < n} \rightarrow^c I\vec{t})$$

$$\text{(ELIM)} \quad \forall_{\vec{x}}^{\text{nc}}(I\vec{x} \rightarrow^c (K_i(I, P))_{i < k} \rightarrow^c P\vec{x})$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} K_i(I, P) := & \forall_{\vec{x}}(\vec{A} \rightarrow (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \rightarrow I\vec{s}_\nu))_{\nu < n} \rightarrow^c \\ & (\forall_{\vec{y}_\nu}(\vec{B}_\nu \rightarrow P\vec{s}_\nu))_{\nu < n} \rightarrow^c P\vec{t}) \end{aligned}$$

Glossar

c.i.	<i>computationally irrelevant</i> , rechnerisch irrelevant
c.r.	<i>computationally relevant</i> , rechnerisch relevant
ι_I	Algebra von Zeugen des induktiv definierten Prädikates I
$I^{\mathbf{r}}$	Bezeugendes Prädikat von I („es gibt einen Realisator von I “)
$t \mathbf{r} A$	t realisiert A
$\tau(A)$	Typ einer Formel A
\circ	Nulltyp
ε	Nullterm
Eq	Leibniz-Gleichheit