

# Realisierbarkeit

Dekoration der Verknüpfungen  $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow^c \\ \rightarrow^{nc} \end{array} \right.$  und  $\forall \left\{ \begin{array}{l} \forall^c \\ \forall^{nc} \end{array} \right.$  rechnerisch  
nicht rechnerisch

Beispiel: Die Algebra der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} := M_{\Sigma}(\{, \} \rightarrow \{, \})$  wie letztes Mal

$\begin{array}{c} \text{Null} \\ \text{Nachfolger} \end{array}$

Totalität auf  $\mathbb{N}$ : (erst undekoriert hinschreiben)

TO  $\forall_n^{nc} (T_n \rightarrow^c T(Sn))$  Einführungsaxiome

$\forall_n^{nc} (T_n \rightarrow^c PO \rightarrow^c \forall_n^{nc} (T_n \rightarrow^c P_n \rightarrow^c P(Sn)) \rightarrow^c P_n)$  Elimination  
Beseitigung

Durch Dekoration ändert sich die logische Bedeutung nicht, nur der rechnerische Gehalt  $\Rightarrow$  diesen kann man so regeln.

Wissen von: Wenn  $T_v$  gilt, kann man das anhand der Klauseln nachvollziehen.

Letztes Mal: ind. Def. von Prädikaten und Formeln  $\Rightarrow$  Handout gilt weiterhin

Nun muss auch die Theorie berechenbarer Funktionale ( $\Rightarrow$  Handout) angepasst werden: Einführung und Elimination von  $\rightarrow^c, \forall^c$  bleibt gleich,

Elimination von  $\rightarrow^{nc}, \forall^{nc}$  auch.

- $\rightarrow^{nc}, \forall^{nc}$  dürfen nur unter bestimmten Umständen eingeführt werden:
- Annahmen / Objektvariablen sollen nicht rechnerisch sein.

Def.: <sup>M<sup>A</sup> Herleitung</sup> Rechnerische Objektvariablen Rechnerische Annahmearienablen

$CV(M^A) := \emptyset$  falls  $A$  c.i.

$CA(M^A) := \emptyset$  falls  $A$  c.i.

$CV(c^A) := \emptyset$  ( $c^A$  Axiom)

$CA(c^A) := \emptyset$  ( $c^A$  Axiom)  
 $CA(\forall^A) := \{u\}$  !

$CV(\forall^A) := \emptyset$

$CV((\lambda_{u^A} M^B)^A \rightarrow^c B) := CV((\lambda_{u^A} M^B)^A \rightarrow^{nc} B) := CV(M)$

$CA((\lambda_{u^A} M^B)^A \rightarrow^c B) := CA((\lambda_{u^A} M^B)^A \rightarrow^{nc} B) := CA(M^A) \setminus \{u\}$  !

$CV((M^A \rightarrow^c B \ N^A)^B) := CV(M) \cup CV(N)$   $CA((M^A \rightarrow^c B \ N^A)^B) := CA(M) \cup CA(N)$

$CV((M^A \rightarrow^{nc} B \ N^A)^B) := CV(M)$   $CA((M^A \rightarrow^{nc} B \ N^A)^B) := CA(M)$

$$CV((\lambda_x M^A) \forall_x^c A) := CV((\lambda_x M^A) \forall_x^{nc} A) := CV(M) \setminus \{x\} \text{!}$$

$$CA((\lambda_x M^A) \forall_x^c A) := CA((\lambda_x M^A) \forall_x^{nc} A) := CA(M)$$

$$CV((M \forall_x^c A(x))_r)^{A(r)} := CV(M) \cup FV(r)$$

$$CV((M \forall_x^{nc} A(x))_r)^{A(r)} := CV(M)$$

$$CA((M \forall_x^c A(x))_r)^{A(r)} := CA((M \forall_x^{nc} A(x))_r)^{A(r)} := CA(M)$$

- (I erklären)

Einführungsregeln für  $\rightarrow^{nc}$ ,  $\forall^{nc}$

(i)  $M^B$  Herleitung und  $v^A \notin CA(M)$ , dann ist auch  $(\lambda_v M^B)^{A \rightarrow^{nc} B}$  eine Herl.

(ii)  $M^A$  Herleitung,  $x$  nicht frei in einer Formel einer freien Annahmevariable von  $M$  und  $x \notin CV(M)$ , dann ist auch  $(\lambda_x M^A) \forall_x^{nc} A$  Herleitung.

Dekoration ist in verschiedenen Arten möglich. Wann ist sie stärker?

Es soll gelten  $\vdash A' \rightarrow^c A$

Def.:  $A'$  ist rechnerische Verstärkung von  $A$ :  $A' \supseteq A$ .  $\supseteq$  Reflexiv, transitiv und:

(i)  $(A \rightarrow^{nc} B) \supseteq (A \rightarrow^c B)$

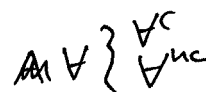
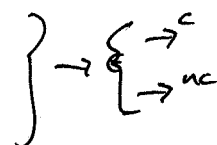
(ii)  $(A \rightarrow^c B) \supseteq (A \rightarrow^{nc} B)$  falls  $A$  c.i.

(iii)  $(A \rightarrow B') \supseteq (A \rightarrow B)$  falls  $B' \supseteq B$

(iv)  $(A \rightarrow B) \supseteq (A' \rightarrow B)$  falls  $A' \supseteq A$

(v)  $\forall_x^{nc} A \supseteq \forall_x^c A$

(vi)  $\forall_x A' \supseteq \forall_x A$  falls  $A' \supseteq A$



Satz: Falls  $A' \supseteq A$ , dann  $\vdash A' \rightarrow^c A$ .

Bew.: Reflexivität, Transitivität klar.

(i) 
$$\frac{A \rightarrow^{nc} B \quad [v:A]}{A \rightarrow^c B} (\rightarrow^{nc})^+, v$$

(iii) 
$$\frac{M \text{ Annahme} \quad \frac{A \rightarrow^{nc} B' \quad [v:A]}{B'}}{B' \rightarrow^c B} \quad \frac{B}{A \rightarrow^{nc} B} (\rightarrow^{nc})^+, v \quad \forall B: v \notin CA(M)$$

(iv) 
$$\frac{A \rightarrow^{nc} B \quad \frac{M \text{ Annahme} \quad A' \rightarrow A^c \quad [v:A']}{A}}{A' \rightarrow^{nc} B} (\rightarrow^{nc})^+, v \quad \forall B: v \notin CA(M)$$

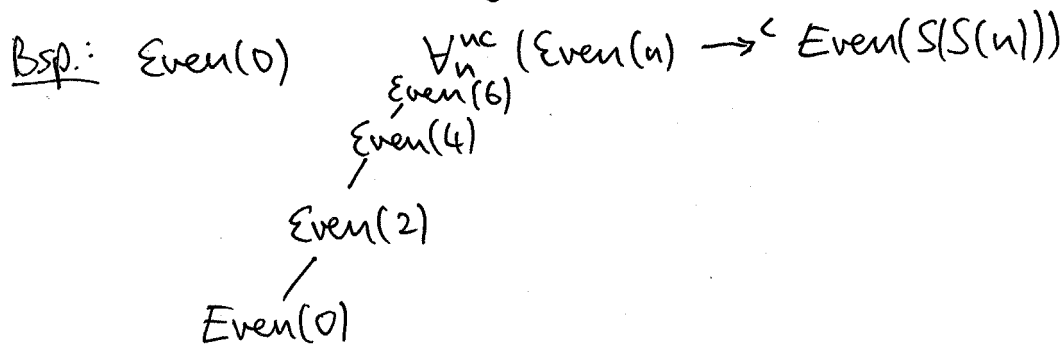
□

# Dekoration induktiver Definitionen

Induktiv definierte Prädikate sind i. A. c.r., ihre Axiome müssen  
 achtsam dekoriert werden: ~~All~~ <sup>In allen</sup> Klauseln sollen die  $\rightarrow$   
 nach der rekursiven Prämisse rechnerisch sein.

Handout  $\Rightarrow$  (Intro)/(Elim)

Wir betrachten nun eine Formel  $A$  als rechnerisches Problem.  
 Wie sieht die Lösung eines solchen für ein rekursives Prädikat aus?



Um solche "Generationsbäume" allg. zu untersuchen, lässt man die  
 Klauseln von  $\mid$  eine Algebra erzeugen.

Def.: Typ  $\tau(A)$  einer Formel  $A$ :

$$\tau(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mid \text{ c.r.} \\ 0 & \text{falls } \mid \text{ c.i.} \end{cases}$$

$$\tau(A \rightarrow^c B) := (\tau(A) \rightarrow \tau(B))$$

$$\tau(A \rightarrow^{nc} B) := \tau(B)$$

$$\tau(\forall_{x \in P}^c A) := \rho \rightarrow \tau(A)$$

$$\tau(\forall_{x \in P}^{nc} A) := \tau(A)$$

$$(\rho \rightarrow 0) := 0 \quad (0 \rightarrow \rho) := 0 \quad (0 \rightarrow 0) := 0$$

Def.: Algebra  $\mathcal{L}_1$  von Zeugen:

Jede Klausel erzeugt einen Konstruktortyp  $\kappa_i = \tau(K_i)$ , relativ zu  $\tau(\vec{x}) = \{$

$$\text{Dann } \mathcal{L}_1 := \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\vec{K}).$$

Bsp.:  $\ulcorner \text{Even}$

$$\ulcorner (\text{Even}(0)) = \{$$

$$\ulcorner (\forall_n^{\text{uc}} (\text{Even}(n) \rightarrow^c \text{Even}(S(S(n)))) =$$

$$= \ulcorner (\text{Even}(n) \rightarrow^c \text{Even}(S(S(n)))) =$$

$$= \ulcorner (\text{Even}(n)) \rightarrow \ulcorner (\text{Even}(S(S(n)))) =$$

$$= \{ \rightarrow \}$$

$$\Rightarrow \ulcorner \text{Even} = \mu_S (\ulcorner \{, S \rightarrow \{) \cong \mathbb{N}$$

Welche induktiv definierten Prädikate sind c.i.?

(i) Für jedes  $l$  ein bezeugendes Prädikat  $l^*$

( $\ulcorner$  es gibt einen Realisator für  $l^*$ ) (nächstes Mal def./erläutert)

(ii)  $\text{Eq}$ ,  $\exists^{\text{uc}}$ ,  $\wedge^{\text{uc}}$

Def.:  $t \Vdash A$  " $t$  realisiert  $A$ ",  $t$  vom Typ  $\ulcorner(A)$

$$t \Vdash l \vec{s} := l^* t \vec{s}$$

$$t \Vdash (A \rightarrow^c B) := \forall_x^{\text{uc}} (x \Vdash A \rightarrow^{\text{uc}} t x \Vdash B)$$

falls  $A$  c.i.

$$= \varepsilon \Vdash A \rightarrow^{\text{uc}} B(\varepsilon)$$

$$t \Vdash (A \rightarrow^{\text{uc}} B) := \forall_x^{\text{uc}} (x \Vdash A \rightarrow^{\text{uc}} t \Vdash B)$$

$$t \Vdash (\forall_x^c A) := \forall_x^{\text{uc}} (t x \Vdash A)$$

$$t \Vdash (\forall_x^{\text{uc}} A) := \forall_x^{\text{uc}} (t \Vdash A)$$

Für  $\varepsilon$  gilt:  $\varepsilon t := \varepsilon$ ,  $t \varepsilon := t$ ,  $\varepsilon \varepsilon := \varepsilon$

$$\varepsilon \Vdash l \vec{s} := l^* \varepsilon \vec{s}$$

$$\varepsilon \Vdash \text{Eq}(t, s) := \text{Eq}(t, s)$$

$$\varepsilon \Vdash \exists_x^{\text{uc}} A := \exists_{x, y}^{\text{uc}} (y \Vdash A)$$

$$\varepsilon \Vdash (A \wedge^{\text{uc}} B) := \exists_x^{\text{uc}} (x \Vdash A) \wedge^{\text{uc}} \exists_y^{\text{uc}} (y \Vdash B)$$

Bem.: Falls  $A$  c.i. sind  $A \rightarrow^c B$  und  $A \rightarrow^{uc} B$  <sup>wechselseitig äquivalent.</sup>

$$\varepsilon \text{ ir } (A \rightarrow^c B) = \forall_x^{uc} (x \text{ ir } A \rightarrow^{uc} \varepsilon x \text{ ir } B) = \varepsilon \text{ ir } A \rightarrow^{uc} \varepsilon \text{ ir } B$$

$$\varepsilon \text{ ir } (A \rightarrow^{uc} B) = \forall_x^{uc} (x \text{ ir } A \rightarrow^{uc} \varepsilon \text{ ir } B) //$$

Analog  $\varepsilon \text{ ir } \forall_x^c A$  und  $\varepsilon \text{ ir } \forall_x^{uc} A (= \forall_x^{uc} (\varepsilon \text{ ir } A))$

Daher gilt falls  $A$  c.i.:

$$\varepsilon \text{ ir } (A \rightarrow^c B) := \forall_x (x \text{ ir } A \rightarrow \varepsilon x \text{ ir } B)$$

$$\varepsilon \text{ ir } (A \rightarrow^{uc} B) := \forall_x (x \text{ ir } A \rightarrow \varepsilon \text{ ir } B)$$

$$\varepsilon \text{ ir } (\forall_x^c A) := \forall_x (\varepsilon x \text{ ir } A)$$

$$\varepsilon \text{ ir } (\forall_x^{uc} A) := \forall_x (\varepsilon \text{ ir } A)$$

evtl. kürzen,  
nur erwähnen

Bsp.:  $\varepsilon \text{ ir } \text{Even}(0) = \text{Even}^r(\underset{\substack{\parallel \\ 0'}}{\varepsilon}, 0)$

$$\varepsilon \text{ ir } \forall_n^{uc} (\text{Even}(n) \rightarrow^c \text{Even}(S(S(n))))$$

$$= \forall_n^{uc} (\varepsilon \text{ ir } (\text{Even}(n) \rightarrow^c \text{Even}(S(S(n))))$$

$$= \forall_n^{uc} \forall_x^{uc} (x \text{ ir } \text{Even}(n) \rightarrow^{uc} \varepsilon x \text{ ir } \text{Even}(S(S(n))))$$

$$= \forall_n^{uc} \forall_x^{uc} (\text{Even}^r(x, n) \rightarrow^{uc} \text{Even}^r(\underset{\substack{\parallel \\ S'}}{\varepsilon x}, S(S(n))))$$