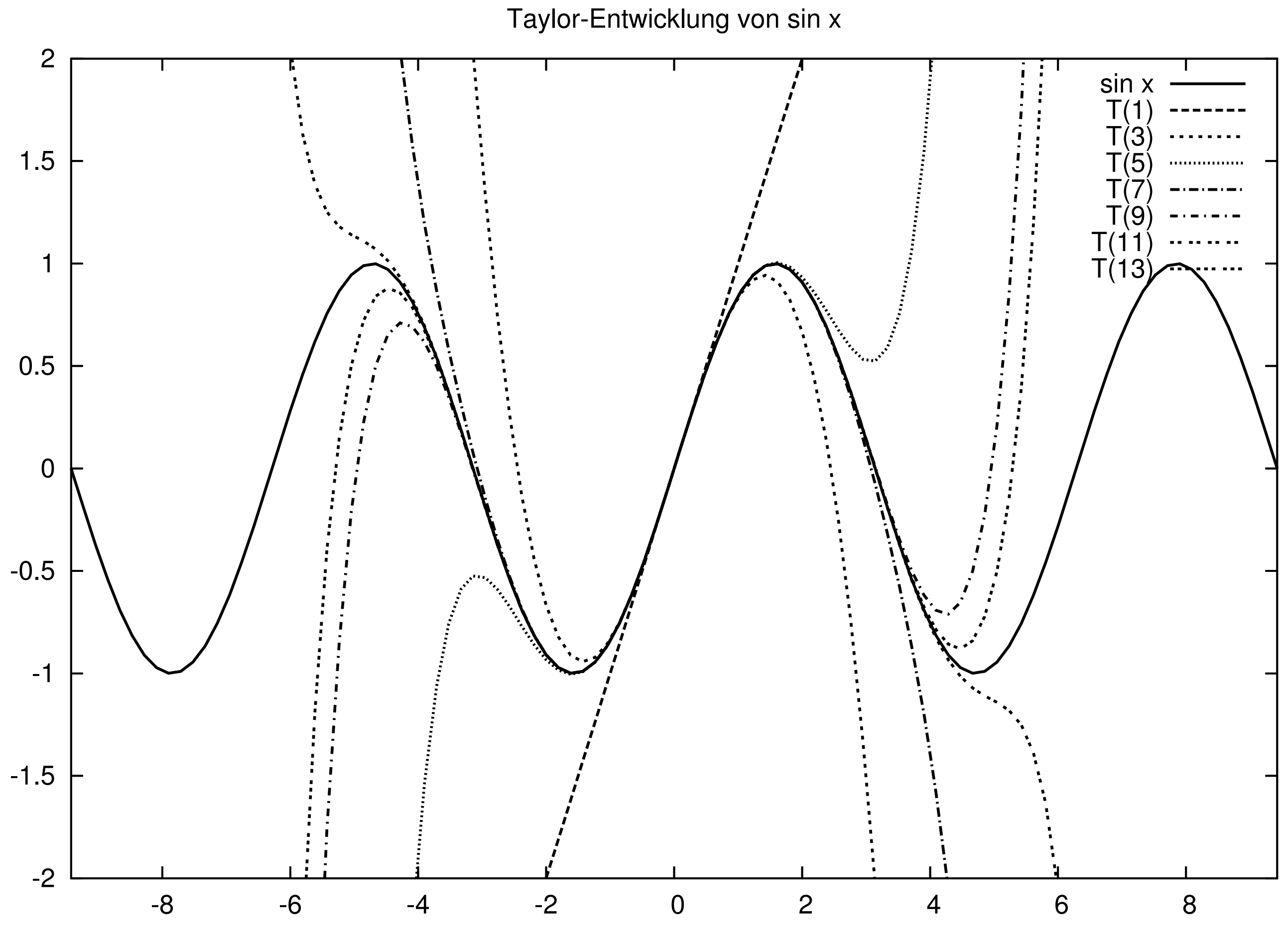
Taylor-Reihen

Mathematik GLF 12/2 2006 von Christian Neukirchen

Wie können wir $\sin x$ berechnen?

Vielleicht gibt es ein Polynom, das $\sin x$ ähnlich ist.



Was wissen wir über den Sinus?

- Ableitung
- Wert an bestimmter Stelle (z.B. $\sin 0 = 0$).

Solche Polynome heißen *Taylor-Polynome* (oder auch *Schmiegeparabeln*) und können mittels Taylor-Reihen entwickelt werden.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a)$$

$$+ \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)$$

$$+ \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3$$

$$+ \cdots$$

Der Einfachheit halber setzen wir $a = 0$ (auch als Maclaurin-Reihen bekannt).

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

Zurück zum Sinus

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f''''(x) &= \sin x & f''''(0) &= 0 \\
f'''''(x) &= \cos x & f''''(0) &= 1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 \\
+ \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{24} \cdot x^4 + \frac{f'''''(0)}{120} \cdot x^5
\end{aligned}
$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$
\begin{aligned}
T(5) = \frac{1841}{3840} &\approx 0.479427 \\
\sin 0.5 &\approx 0.479426
\end{aligned}
$$

Annäherung von e

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\
f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\
f''''(x) &= e^x & f''''(0) &= 1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$
\begin{aligned}
e &\approx 2.718281828 \\
T(2) &\approx 2.500000000 \\
T(5) &\approx 2.716666667 \\
T(10) &\approx 2.718281801
\end{aligned}
$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \cdots$$

Beweis des Satz von Taylor

Satz von Taylor: Ist eine Funktion f in einem Intervall $I \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so gilt für $x, a \in I$ die Potenzreihenentwicklung:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Skizze eines Beweises:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x (x-t)^0 f'(x)dt \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x + \int_0^x (x-t)^1 f''(x)dt \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 \\ &\qquad + \int_0^x (x-t)^2 f'''(x)dt \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Übrigens:

Da $4 \cdot \tan^{-1} 1 = \pi$:

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \cdots$$

Über Taylor-Reihen:

- Einige Annäherungen waren bereits im 14. Jhd. dem indischen Mathematiker Madhava bekannt (er hat damit π auf 13 Stellen berechnet).
- Im 17. Jhd. fand James Gregory einige Maclaurin-Reihen.
- Erst 1715 wurde der Beweis von Brook Taylor veröffentlicht, daher sind sie ihm zu Ehren benannt.

Über Brook Taylor (1685–1731):

Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

- Englischer Mathematiker
- 1715: *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*
- bekannt für knappe und obskure Aufschriften
- Das Taylor-Theorem war ihm 1712 bekannt, wurde aber erst 1772 von Lagrange als bedeutsam wiederentdeckt.

Quellen:

- http://www.mathe.braunling.de/Taylor.htm
- http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aussage/aussage183/
- http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung81/
- http://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe
- http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series
- http://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel
- http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem
- http://www.et.fh-koeln.de/ia/ma/taylor.html
- http://www.antigauss.de/taylor1/taylor.pdf

Vielen Dank!