Taylor-Reihen

Mathematik GLF 12/2 2006
Christian Neukirchen

1 Einführung

Oft können wir bestimmte mathematische Funktionen nicht genau ausrechnen, besonders die trigonometrischen Funktionen wie $\sin x$, $\cos x$, oder die e-Funktion e^x bereiten Probleme beim Auf- und Ableiten. Es ist daher hilfreich, eine *Näherung* zu bestimmen, um so wenigstens einen ungefähren Wert zu erhalten, der nicht all zu fern vom exakten Wert ist.
Eine Möglichkeit, solche Nährungsfunktionen zu bilden, sind *Taylor-Reihen*. Taylor-Reihen helfen uns, ein Taylor-Polynom $T(x)$ zu berechnen, das eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines Punktes a annähert.
Die allgemeine Form der Taylor-Reihe lautet:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \frac{f''''(a)}{4!} \cdot (x-a)^4 \cdots
\end{aligned}
$$

(Hier sei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von $f(x)$ und $n!$ die n-te Fakultät ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n-1 \cdot n$.))
Oft setzt man $a = 0$ (diesen Fall nennt man auch *Maclaurin-Reihe*), was die Formel etwas übersichtlicher macht:

$$T(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \cdots$$

Wir werden im Folgenden vor allem Maclaurin-Reihen betrachten, dies alles funktioniert aber auch mit $a \neq 0$.

2 Berechnen von $\sin x$

Wir wollen nun ein Taylor-Polynom vierten Grades von $\sin x$ berechnen. Dazu leiten wir erst mal ab, und berechnen alle $f^n(0)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f''''(x) &= \sin x & f''''(0) &= 0 \\
f'''''(x) &= \cos x & f''''(0) &= 1
\end{aligned}
$$

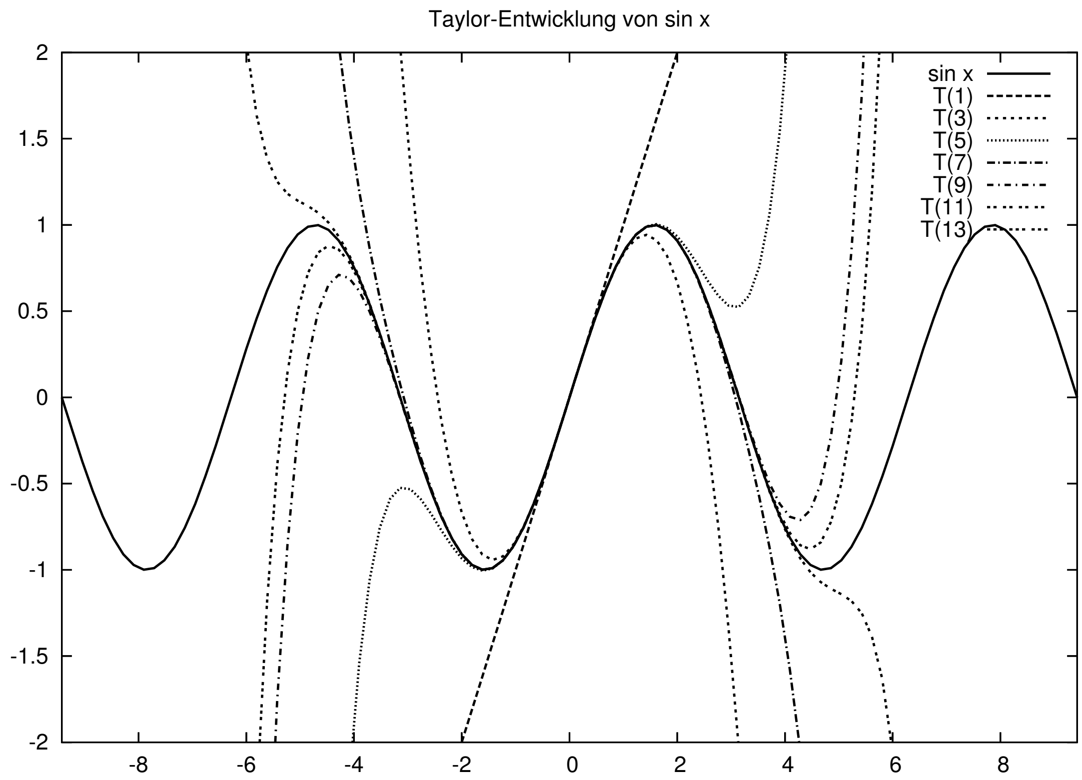
Hier unsere Taylor-Reihe, ausgeschrieben bis 5. Die Fakultäten wurden bereits ausgerechnet:

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{24} \cdot x^4 + \frac{f'''''(0)}{120} \cdot x^5$$

Jetzt können wir die oben berechneten Werte einsetzen, vereinfachen, und erhalten:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Verschiedene Taylor-Polynome im Vergleich (Wenn wir den Definitionsbereich von $\sin x$ beachten, liefert schon $T(5)$ eine sehr gute Annäherung):



3 Berechnen von e^x

Nun wollen wir e^x bestimmen. Glücklicherweise ist hier das Ableiten ganz einfach:

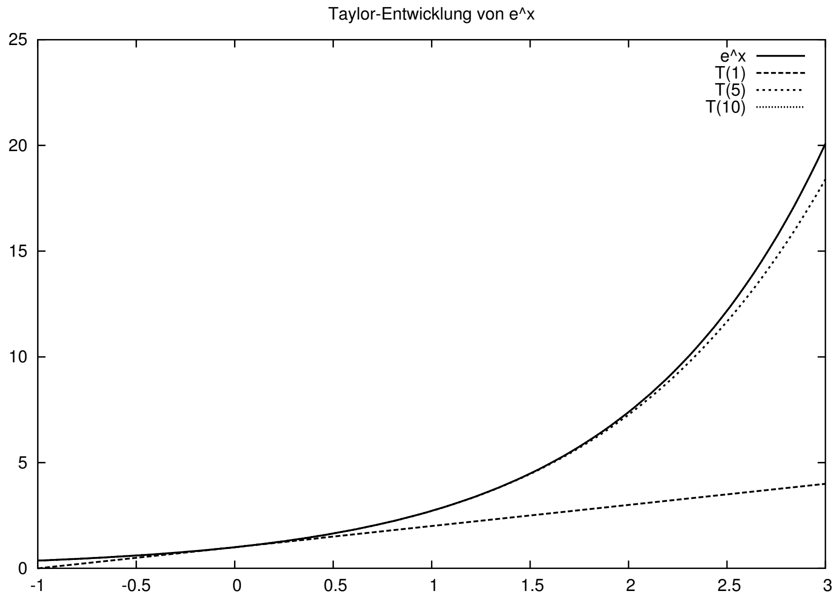
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= 1 \\ f''''(x) &= e^x & f''''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Wir nehmen wieder das allgemeine Taylor-Polynom vierten Grades:

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{24} \cdot x^4$$

Setzen ein und vereinfachen:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



Wenn wir die Annäherung in verschiedener Genauigkeit vergleichen, sieht man, wie sie recht schnell gegen e konvergiert. (Beachte: 1 liegt nahe bei 0)

$$\begin{aligned} e &\approx 2.718281828 \\ T(2) &\approx 2.500000000 \\ T(5) &\approx 2.716666667 \\ T(10) &\approx 2.718281801 \end{aligned}$$

4 Nützliche Taylor-Reihen

Viele Funktionen können geschickt durch Taylor-Reihen angenähert werden, hier einige Beispiele:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} \cdots \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} \cdots \\ e^x &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} \cdots \\ \ln(x+1) &\approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} \cdots \\ \frac{\pi}{4} &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \cdots \end{aligned}$$

5 Beispiel: Integrieren von $(\sin x)/(x+1)$

Zum Abschluss wollen wir $(\sin x)/(x+1)$ ableiten. Dies ist mit algebraischen Mitteln nicht möglich; will man einen Zahlenwert erhalten, kann man nur annähern.
Man leitet also ein paar mal ab:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x+1} \qquad f(0) = 0 \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x - x\,\cos x - \cos x}{(x+1)^2} \qquad f'(0) = 1 \tag{2}$$

$$f''(x) = \frac{-x^2\,\sin x + 2\,x\,\sin x - \sin x + 2\,x\,\cos x + 2\,\cos x}{(x+1)^3} \qquad f''(0) = -2 \tag{3}$$

Wie man sieht, wird das schnell unhandlich. Glücklicherweise kann man, hat man einige Glieder berechnet, oft auf die Folge schließen. ($f'''(0) = 5$).
Wir nehmen also wieder unser Taylorpolynom; der Einfachheit halber nur dritten Grades:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

Und setzen wieder ein:

$$0 + 1 \cdot x + \frac{-2}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{6} \cdot x^3 \quad = \quad x - x^2 + \frac{5}{6}x^3$$

Für einen Computer sind diese Berechnung kein Problem, daher noch einige Glieder mehr:

$$x - x^2 + \frac{5\,x^3}{6} - \frac{5\,x^4}{6} + \frac{101\,x^5}{120} - \frac{101\,x^6}{120} + \frac{4241\,x^7}{5040} - \frac{4241\,x^8}{5040} + \frac{305353\,x^9}{362880} - \frac{305353\,x^{10}}{362880}$$

Nun können wir verschiedene Integrale vergleichen:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x+1} dx \approx 0.0267209$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} T(2) dx \approx 0.0260417 \qquad \int_0^{\frac{1}{4}} T(5) dx \approx 0.026727 \qquad \int_0^{\frac{1}{4}} T(10) dx \approx 0.0267209$$

$$\int_0^{1} \frac{\sin x}{x+1} dx \approx 0.284227$$

$$\int_0^{1} T(2) dx \approx 0.166667 \qquad \int_0^{1} T(5) dx \approx 0.348611 \qquad \int_0^{1} T(10) dx \approx 0.24771$$

$$\int_0^{2} \frac{\sin x}{x+1} dx \approx 0.670911$$

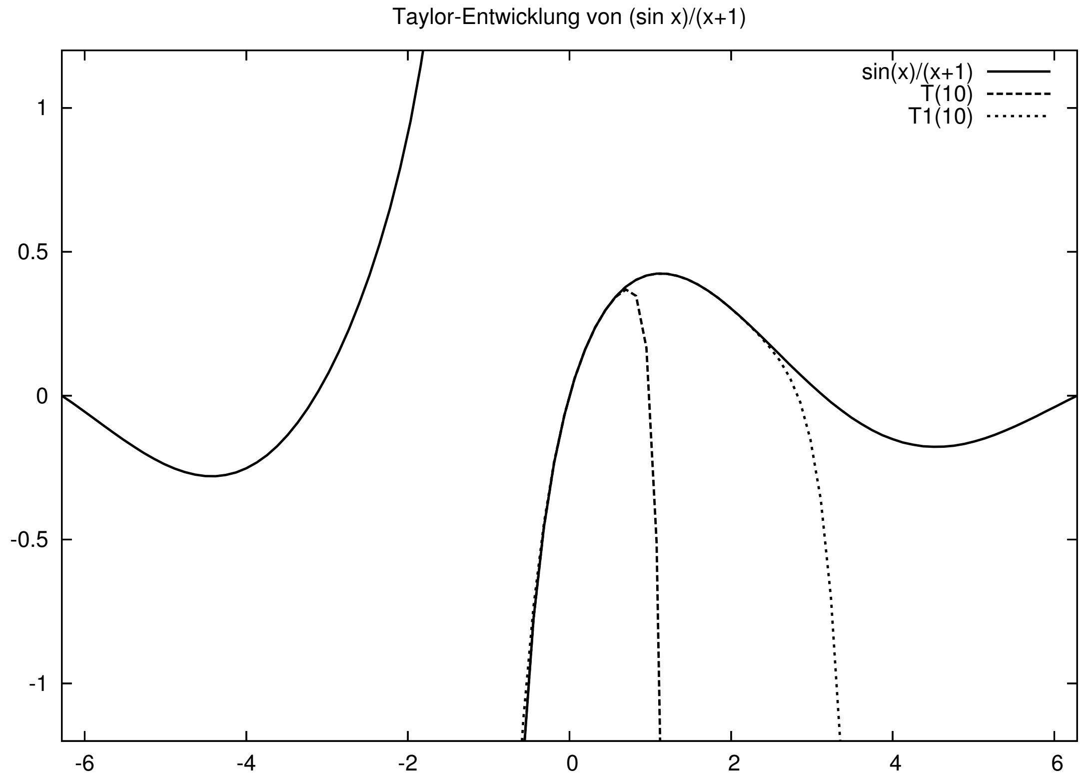
$$\int_0^{2} T(2) dx \approx -0.666667 \qquad \int_0^{2} T(5) dx \approx 6.31111 \qquad \int_0^{2} T(10) dx \approx -100.523$$

$$\int_0^{2} T_1(10) dx \approx 0.670931$$

Merke: Will man mit einer Taylor-Reihe gut annähern ist zu beachten (vgl. auch Newton-Verfahren):

(a) ausreichend Glieder zu berechnen

(b) den Startpunkt geschickt zu wählen (vgl. $T(10)$ mit $T_1(10)$, letzteres wurde mit $a = 1$ berechnet.).



6 Zusammenfassung

Taylor-Reihen erlauben uns, ein Polynom zu finden, das eine beliebige Funktion, die genügend oft differenzierbar ist, in der Nähe einer Umgebung anzunähern.
In Handarbeit Taylor-Reihen zu berechnen erinnert eher an eine Strafarbeit; für Computer ist es jedoch kein Problem, Taylor-Polynome für beliebige Grade herzustellen. Gerade in diesem Bereich finden sie auch die meiste Anwendung. Die Sinus-Funktion im Taschenrechner kennt zum Beispiel einfach ein bestimmtes Taylor-Polynom und kann so beliebige Werte von $\sin x$ mit den Grundrechenarten bestimmen.